

# Применение параллельных алгоритмов для решения многомерных задач газовой динамики

Рыбакин Б.П.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Научно Исследовательский Институт Системных Исследований, Российская Академия Наук

<sup>2</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова (rybakin@vip.niisi.ru)

**Аннотация** Представлены результаты расчетов трехмерных задач газодинамики на многопроцессорных компьютерах. Решение системы газодинамических уравнений проводилось с помощью схем высокой разрешающей возможности типа TVD (Total Variation Diminishing). Математическое моделирование осуществлялось на основе трехмерных уравнений Эйлера с помощью метода конечных объемов высокого порядка на равномерной сетке. Максимальный размер вычислительной области равнялся  $4096 \times 1024 \times 1024$  4.295 миллиарда ячеек. Расчеты на больших сетках требуют достаточно большого количества оперативной памяти и больших вычислительных ресурсов. В работе была использована технология параллельного программирования OpenMP.

## 1 Введение

В работе приводятся результаты математического моделирования ударного взаимодействия пузырька газа пониженной плотности с ударной волной. Интерес к таким задачам связан с различными практическими приложениями: моделированием процессов турбулентного горения в прямоточных воздушно-реактивных двигателях (ПВРД), моделированием безоперационного удаления камней в почках (литотрипсия) в медицине, при изучении эффектов сонолюминисценции, при моделировании задач астрофизики и т. д. Экспериментальные исследования указанных процессов имеют важное значение, но технически трудоемко и не позволяют выяснить тонкие подробности происходящих процессов, таких как возникновение и распад внутренних волн, индуцированных ударной волной вихрей и других эффектов. Для создания двигателей для перспективных гиперзвуковых аппаратов необходимо детально исследовать процессы турбулентного перемешивания компонент топлива с окислителем [1]. Численное моделирование таких процессов на высокопроизводительных компьютерах позволяет подробно исследовать особенности происходящих физических явлений. В астрофизике часто возникают задачи взаимодействия ударных волн, образующихся в результате взрывов сверхновых звезд, релятивистских выбросов с молекулярными облаками межзвездного и межгалактического вещества [2]. В результате такого взаимодействия происходит фрагментация и коллапс молекулярных облаков, что приводит к формированию новых звездных и планетных систем.

Для детального исследования этих процессов необходимо использовать достаточно подробную сетку. В данной работе представлены результаты математического моделирования на сетке  $4096 \times 1024 \times 1024$ . Число Маха падающей волны менялось от 2.5 до 3.0, число Атвуда равно  $At=0.9334$ .

## 2 Постановка задачи

Компьютерное моделирование процесса взаимодействия ударной волны с пузырьком газа подробно изучалось различными авторами [4, 5]. Было обнаружено образование множественных вихревых колец. В работе [6] проведено трехмерное численное моделирование с большим разрешением, для задач взаимодействия пузырьков – ударная волна. Были отмечены эффекты появления турбулентности и неосесимметричности.

Взаимодействие ударной волны с границами раздела газа с различными плотностями приводит к возникновению неустойчивости Рихтмайера – Мешкова и затем, к возникновению турбулентному перемешиванию. Такой процесс позволяет улучшить смешивание окислителя с топливом в камерах сгорания двигателей [7]. Прохождение плоской ударной волны через криволинейные поверхности, которые разделяют вещества с различными плотностями, вызывает бароклиный эффект, который связан с разницей между градиентами давления и плотности [8, 9].

Различными авторами были проведены экспериментальные исследования поведения этих неустойчивостей на границе раздела двух сред [6, 10, 11]. Было отмечено, что на границах, наблюдалась деформация и неустойчивость процессов взаимодействия цилиндрических и сферических пузырьков. Несмотря на то, что большинство работ по численному моделированию выполнены в двумерной постановке и с не очень большим

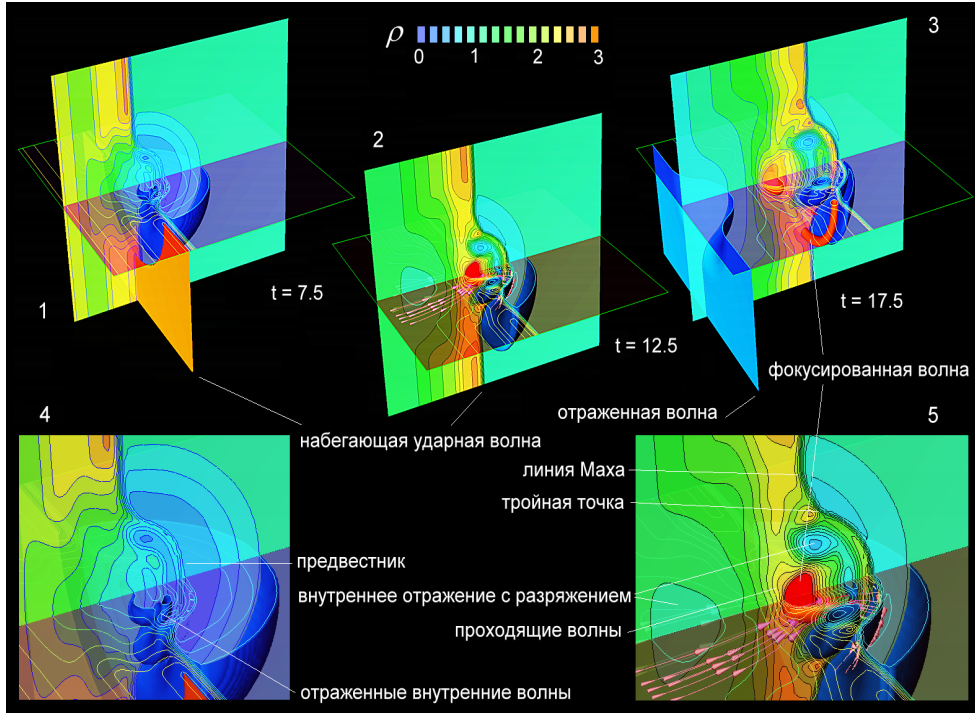


Рис. 1: Тестовый расчет, распределение плотности для трех моментов безразмерного времени

разрешением, тем не менее они позволили уяснить некоторые вопросы взаимодействия между ударными волнами различной интенсивности и пузырьками пониженной плотности.

Уравнения газовой динамики в консервативной форме могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{U}$  вектор консервативных переменных,  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  and  $\mathbf{F}_z$  - потоки. В уравнениях (1) для идеального газа, вектор  $\mathbf{U}$  записывается так:

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E)^T, \quad (2)$$

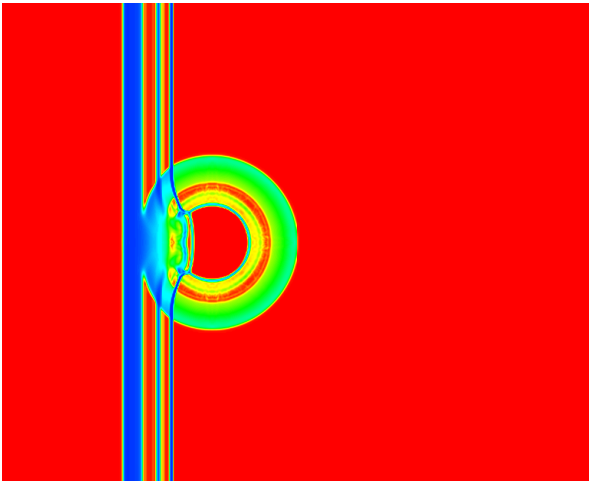
$$\mathbf{F}_x = (\rho v_x, \rho v_x^2, \rho v_x v_y, \rho v_x v_z, \rho E + p)^T \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  компоненты вектора скорости  $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$  энергия,  $\rho$  - плотность и  $p$  - давление. Потоки  $\mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{F}_z$  определяются аналогично (2).

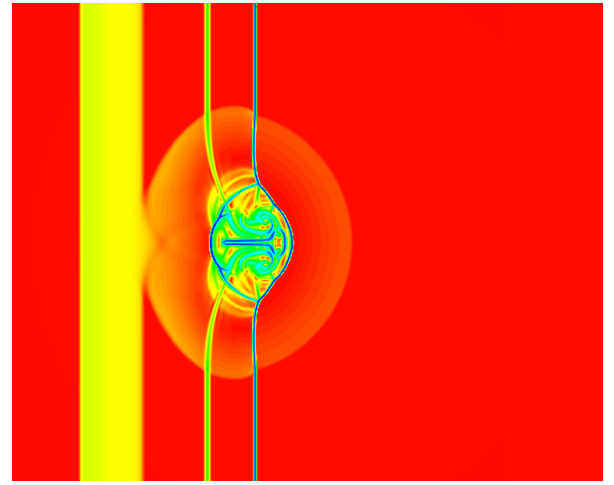
## 2.1 Начальные и граничные условия

Расчетная область представляет собой параллелепипед размерами  $S_x = 0.4096, S_y = S_z = 0.1024$  м. Размеры ячеек  $d_x = d_y = d_z = 0.0001$  м. Радиус пузырька равняется  $R=0.0128$  м и его центр расположен в точке с координатами  $x_c = 0.1493, y_c = z_c = 0.0512$  м. На левой и правой границах расчетной области задаются условия свободного протекания. На остальных границах реализованы условия непротекания.

При моделировании такого взаимодействия пузырька с ударной волной делается ряд допущений. Реальная ударная волна имеет конечную толщину, ее поверхность не идеально плоская, уравнения состояния для газа в окружающей области и в пузырьке отличаются. Отличие заключается в различных величинах молекулярной массы и соотношения теплоемкостей  $\gamma$ . Таким образом, в каждом газе существует своя скорость звука, равная  $a_i = \sqrt{\gamma_i \frac{p_i}{\rho_i}}, i = 0, 1$ , ( $i = 0$  для окружающего газа,  $i = 1$  для пузырька). Соответственно и числа Маха



(a)



(b)

Рис. 2: Шлирен фотографии процесса взаимодействия ударной волны с пузырьком газа в моменты времени  $t=0.0$  (a) и  $t=0.0$  (b)

$M_i = u_i/a_i$  для этих сред будут отличаться. Тем не менее, в работах [?, 4] показано, что различие в термодинамических характеристиках разных газов и различием в показателях  $\gamma$  можно пренебречь, и использовать модель с одним показателем  $\gamma = 1.4$ .

В представленной работе мы будем пренебрегать этими различиями. Будем предполагать, что приведенные выше величины одинаковы, как в окружающем газе, так и в пузырьке. Изучать задачу взаимодействия ударной волны с пузырьком газа будем в эйлеровой прямоугольной системе координат. Эйлеровы схемы хорошо работают в большинстве задач газовой динамики. им свойственны некоторые недостатки, связанные с возможностью появления нефизических осцилляций на фронтах ударных волн и на границах раздела газов с различной плотностью. Кроме того, затруднительно проводить расчеты для газов с различными газодинамическими параметрами, которые находятся в одной ячейке.

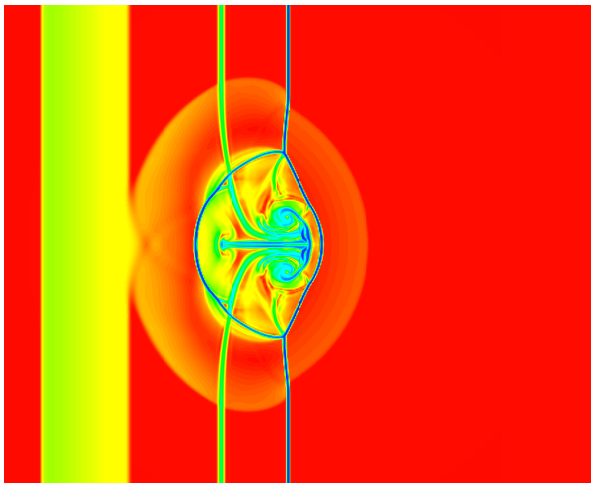
### 3 Обезразмеривание

Приведем систему трехмерных уравнений Эйлера к безразмерному виду. Для этого представим каждую функцию в виде  $f = f_0 f'$ . Здесь  $f'$  – безразмерная величина, а  $f_0$  – некоторый постоянный размерный масштабный множитель. В качестве таких масштабных множителей используются характерные величины, участвующие в задаче. Все величины обезразмерены следующим образом:

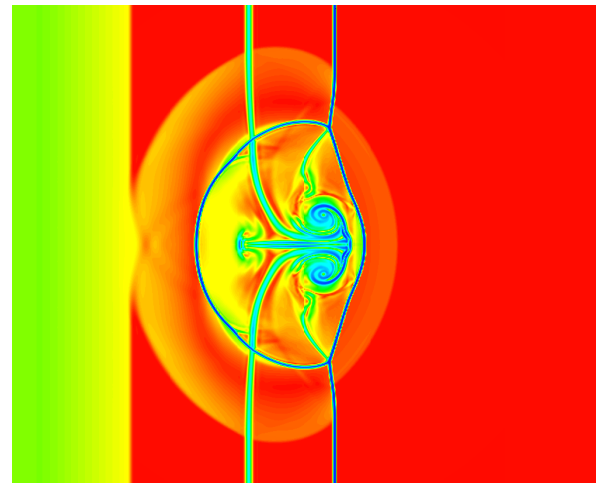
$$t = t_0 t', x = x_0 x', u = u_0 u', v = v_0 v', w = w_0 w', p = p_0 p', \rho = \rho_0 \rho', e = e_0 e'.$$

После проведения вычислений с помощью введенных масштабных множителей можно привести вычисленные величины к размерному виду.

Для получения зависимости между размерными и безразмерными величинами в большом диапазоне воспользуемся зависимостью между характерными размерами и скоростью звука [6]. Наиболее общий подход основан на построении физического времени задачи с помощью числа Маха  $M$ , начального радиуса пузырька  $R$  и скорости звука  $c$  в окружающем газе  $t_0 = \frac{R}{Mc}$ . Скорость звука для воздуха при  $20^\circ C$  равна  $c=334$  м/сек, плотность  $\rho = 1.163 \text{ kg/m}^3$ . Тогда нормирующий множитель  $t_0 = 1.53 \cdot 10^{-5}$  сек = 0.0153 мсек.



(a)



(b)

Рис. 3: Шпирен фотографии процесса взаимодействия ударной волны с пузырьком газа в моменты времени  $t=0.0$  (a) и  $t=0.0$  (b)

#### 4 Разностная схема

Современные разностные схемы высокого разрешения возникли на базе противопотоковых схем, предложенных С. Годуновым [13]. Согласно теореме Годунова только схемы первого порядка точности сохраняют монотонность разностных схем. Следовательно, схемы более высокого порядка являются осциллирующими.

#### 5 Результаты и обсуждение

Моделирование многомерных задач на большой сетке требует больших вычислительных ресурсов.

#### Список литературы

1. J. Yang, T. Kubota, E. Zukoski. A model for characterization of a vortex pair formed by shock passage over a light-gas inhomogeneity, *J. Fluids Mech.*, 258, (1994), pp. 217-244.
2. N. Kevlahan, Ralph E. Pudritz. Shock-generated vorticity in the interstellar medium and the origin of the stellar initial mass function. *The Astrophysical Journal*, 702:39–49, 2009 September 1.
3. Arthur D. Smith, Gopal H. Badlani, Glenn M. Preminger, Louis R. Kavoussi. *Physics of Shock-Wave Lithotripsy*. Wiley, Smith's Textbook of Endourology, Volume I– II, 3rd Edition, DOI: 10.1002/9781444345148.ch49
4. Picone, J.M., Boris, J.P.: Vorticity generation by shock propagation through bubbles in a gas. *J. Fluid Mech.* 189, 23–51 (1988)
5. J.J. Quirk, S. Karni. On the dynamics of a shock – bubble interaction. *J. Fluid Mech.* 318, 129 – 163 (1996)
6. J. Niederhaus. A Computational Parameter Study for Three-Dimensional Shock-Bubble Interaction. Fusion Technology Institute, University of Wisconsin, September 2007.
7. E.S. Oran, V.N. Gamezo. Origins of the deflagration to detonation transition in gas-phase combustion. *Combust. Flame*, 148, (2007), pp. 4-47.
8. B. Rybakin. Modeling of III-D Problems of Gas Dynamics on Multiprocessing Computers and GPU. *Computers and Fluids*, Elsevier, DOI information: 10.1016/j.compfluid. 2012. 01.016, 31-JAN-2012
9. . Б.П. Рыбакин. The solution of three-dimensional gas dynamics problems on graphics processors. *Vestnik UGATU*, 2012 г. т.16, №6(51), стр. 108-112, ISSN 1992-6502. (in russian)
10. J. Haas and B. Sturtevant, "Interaction of weak shock-waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 181, pp. 41–76, 1987.

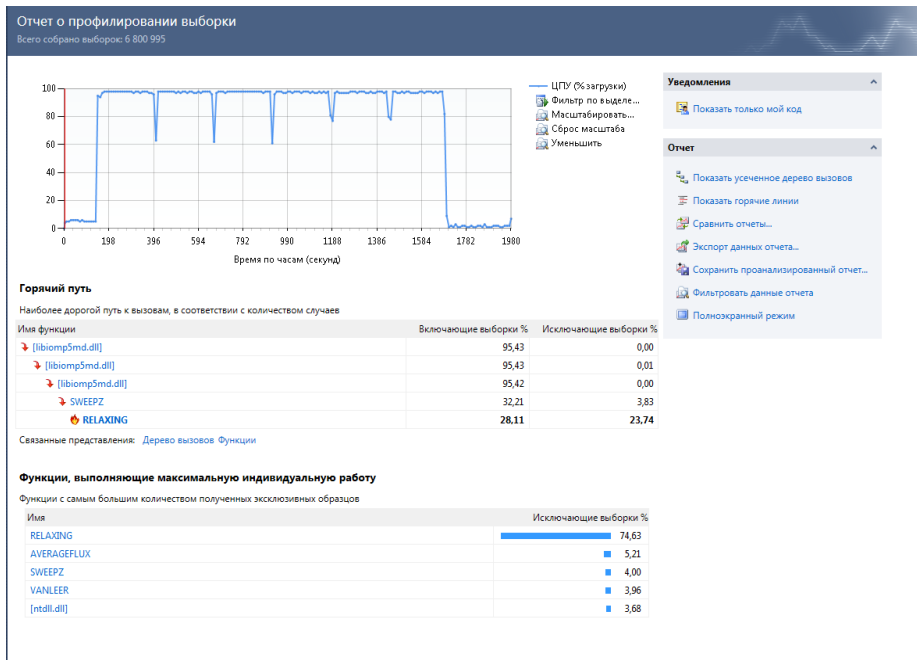


Рис. 4: Решение уравнения Gray-Scott

11. Y. J. Zhu · G. Dong · B. C. Fan · Y. X. Liu. Formation and evolution of vortex rings induced by interactions between shock waves and a low-density bubble. *Shock Waves* (2012) 22:495–509, DOI 10.1007/s00193-012-0393-8
12. S. M. Cox and P. C. Matthews. Exponential Time Differencing for Stiff Systems. *J. Comput. Phys.*, pp.430-455, 2002.
13. S. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics. *Mat. Sb.* 47 (1959), 271–300
14. B. Fornberg. *A Practical Guide to Pseudo-Spectral Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
15. J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, New York, second edition, 2001
16. L. N. Trefethen. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, Philadelphia, 2000.
17. H. Berland and B. Skaestad. Solving the Nonlinear Schrodinger Equation Using Exponential Integrators. *Norwegian Society of Automatic Control*, 27, 201-217, 2006.
18. Kassam, A. and Trefethen, L. N. 2003. Fourth-order time stepping for stiff PDEs. <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/etd.ps.gz>.